12. 双曲「幾何」の定理

12.1 ユークリッドの公理(公準)

ユークリッドの公理は， 次の５つあります．なお，ユークリッドの原論では，「二直線が平行⇔二直線が交わらない」と定義します．

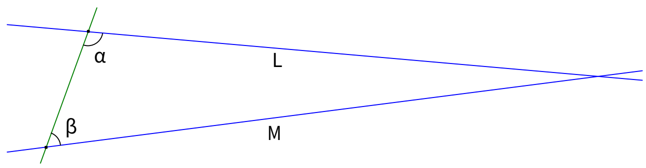
１．与えられた二点 A, B に対し, A, B を結ぶ線分を１つ，そして唯１つ引くことができる．

２． 与えられた線分は，どちら側にも限りなく伸ばすことができる．

３．平面上に二点 A, B が与えられたとき， A を中心とし B を通る円を唯１つ描くことができる．

４．直角は全て相等しい．

５．二直線と交わる一つの直線が同じ側に作る内角の和（同側内角の和）が二直角より小さいならば，二直線を伸ばせばどこかで交わる． （下図）



[$\alpha + \beta < 180^\circ$ ならば，L と M は交わる]

5'　直線 l とその上にない点 A が与えられたとき， l に平行な直線は一本存在し，唯一本に限る．

【注】公準１～４だけを使って命題「2 直線の内角の和が二直角ならば，2 直線は平行である.」 は成り立つことが証明されます．すなわち「平行線は少なくとも一本引ける」ので，公準 5 と公準 5'は同値となります．

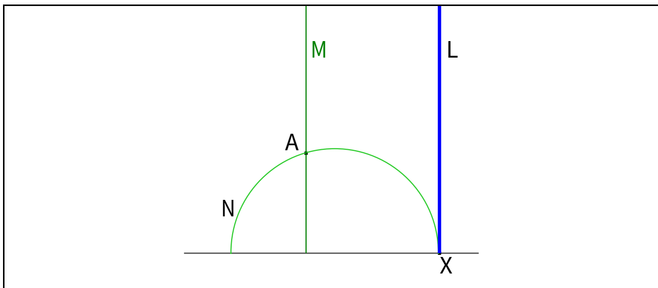
しかし，H^+ では，**公準 1 から公準 4 までは，成り立つが，公準 5 は成り立ちません．**そして「公準 5'」は次のようになります．

5'　直線 l とその上にない点 A が与えられたとき，A を通り l に交わらない直線は無数に存在する．

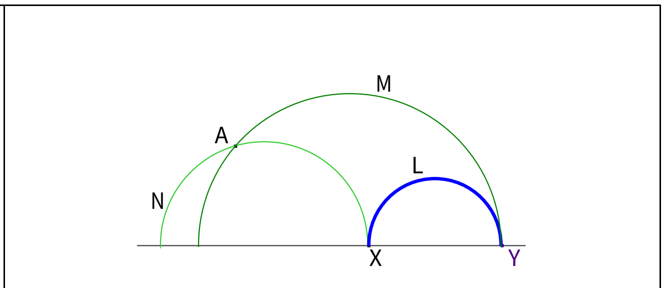
双曲幾何では，「平行⇔どちらかの方向で無限遠点を共有」と定義するので，公準 5'は次と同値です．

5"　双曲的直線 l 外の１点 A を通り， l と双曲的平行な双曲的直線は ちょうど２本引ける

例えば，下図で，N と M は共に L に平行です．A を通り L と平行な直線は 2 本引けます．**(4.3.2)**



Lが実軸に平行な直線（無限遠点は X と「∞」）のとき



Lが実軸に中心を持つ円（無限遠点は X と Y）のとき

公準 1~4 は双曲幾何でも成り立つので，**公準 1~4** だけを使って証明される定理は　双曲幾何でも成り立ちます．例えば，

三角形の外角は　隣り合わない内角より大きい．
同位角（または錯角）が等しいければ，２直線は交わらない．
同側内角の和が 180 度ならば，２直線は交わらない．
直線 l 外の一点 A から，l に垂線を引ける．
二等辺三角形の二つの底角は等しい．
二つの底角が等しいならば，二等辺三角形になる．
一般の三角形の合同条件：
　　3 辺相等ならば，三角形は合同，
　　2 辺とその間の角が等しいならば，三角形は合同，
　　1 辺と両端の角が等しいならば，三角形は合同
直角三角形の合同条件：
　　斜辺と一角が等しいならば合同
　　斜辺と他の一辺が等しいならば合同

などは成り立ちます．しかし，**公準 5** を使って証明される定理，例えば

三角形の内角の和は 180°．
三角形の外角は隣り合わない内角の和に等しい．
相似な三角形の組が存在する．
3 点を通る円が必ず引ける．（外心が必ず存在する.）
三角形の垂心は常に存在する．
平行四辺形の面積は「底辺の長さ×高さ」である．
三平方の定理.

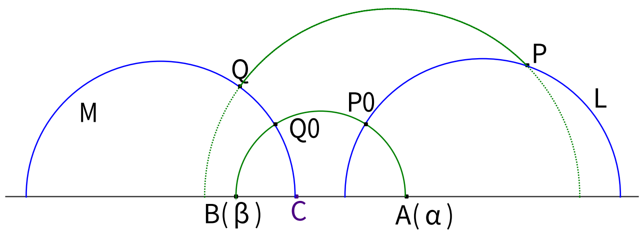
などは成立しません.

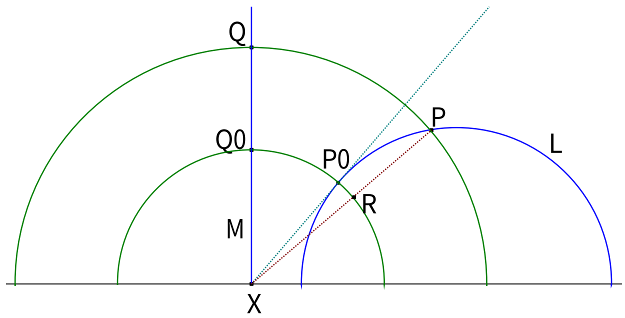
以上のことについて，詳しくは,「**ユークリッド幾何から現代幾何へ**」（小林昭七著）または「**幾何学Ⅱ**」（ハーツホーン著）を　ご参照ください．なお，H^+ とは全く離れますが,「幾何的」なことは，Bolyai の「空間論」がとても面白いです．こちらも合わせてご覧ください.

12.2． 双曲幾何の定理

【注】 [A,B]は 2 点 A,B の双曲的距離を表します．この節では，直線は「双曲的直線」を，線分は「双曲的線分」を， 平行 は「双曲的平行」を表します． また 三角形，四角形は 全ての辺が双曲的線分とします．

定理 1. 超平行な 2 直線 l, m は共通垂線をただ一本持つ．かつ，l 上の点 P から m に下ろした垂線の足を Q とすると，[P,Q]は，直線 PQ が共通垂線のとき最小になり，PQ が共通垂線から離れれば離れるほど 限りなく増大する．

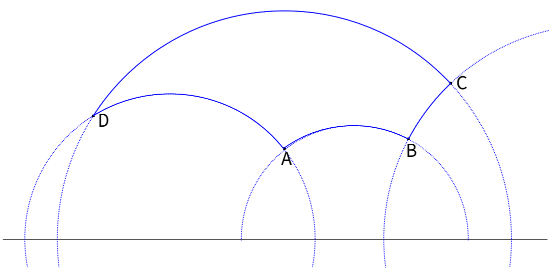


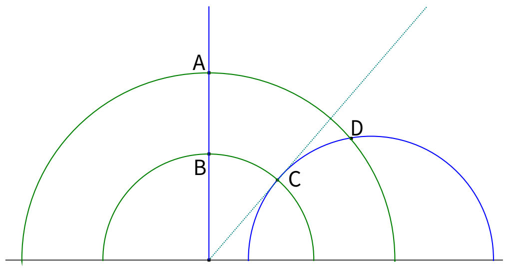


証明

M と実軸の交点の 1 つを C とすると，C を中心とする円に関する鏡像 f で，M は実軸に垂直な半直線に移ります．この半直線と実軸の交点を X とすると，f は直線 PQ を X を中心とする半円に移します．そして，円 L に接線 XP_0 を引き，P_0 から M に垂線の足 Q_0 を下ろすと，P_0Q_0 は唯一の共通垂線です．さらに，ユークリッド的直線 XP と共通垂線の交点を R とすると，$[P,Q]=[R,Q_0]$ だから，P が P_0 から離れれば，それにつれて [P,Q] は限りなく増大します．なお 6.4（Crtl+Click）からも，共通接線は一本になることが分かります．

補題 1. 三角が直角の四角形の内角の和は 360°より小さい．





∠A, ∠B, ∠C が直角とします．このとき，直線 AB と CD は超平行となるので，直線 BC は，**定理 1** の共通垂線です．そして，適当な円に関する鏡像によって，右上図のような四角形 ABCD に移ります．よって，その内角和は 360°より小さくなります．

CabriⅡによる検証 (定理 1 と補題 1)

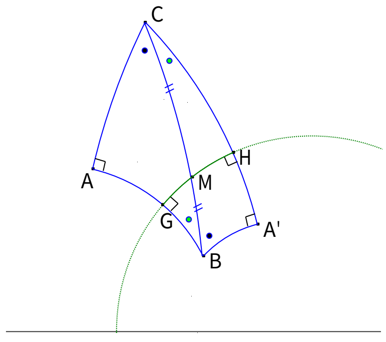
点 D,P,Q を drag して下さい． theorem1.html

定理 2．三角形の内角の和は 180 度より小さい．

(ア) 直角三角形の場合

直角三角形 ABC に対し，これと合同な三角形 A'B'C' を作り，辺 B' C を辺 C' B に図のように重ね，四角形 ABA'C を作ります．このとき

$$\angle ACB = \angle A'BC,\quad \angle ABC = \angle A'CB.$$



さらに線分 BC の中点 M をとり，M から直線 AB に垂線 MG を引き，直線 GM と A'C の交点を H とします．すると，「斜辺と一角相等」で，

$$\triangle \ BGM \equiv \triangle CHM.$$

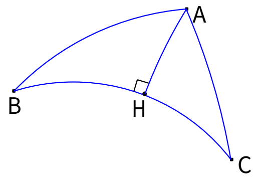
故に，直線 GH は直線 AB と A'C の共通垂線となります．したがって**補題 1** より，四角形 BA'HG，AGHC の内角和は 2π より小さくなり，四角形 ABA'C の内角和は 2π より小さくなります．

従って，三角形 ABC の内角和も π より小さくなります．

【注】M は共通垂線の中点でもあります．また B と C，A と A' は M に関し双曲的点対称です．このように，**共通垂線の中点は，回転の中心のような働きもしています．**

(イ) 一般の三角形の場合

△ABC の最大角を A とすると，A から BC に下ろした垂線の足 H は線分 BC 上にあります．そして，△ABH と△ACH の内角和は共に π より小さくなります．故に，△ABC の内角和も π より小さくなります．



CabriⅡによる検証 (定理２)

点 A,B,C を drag して下さい． theorem2-1.html, theorem2-2.html

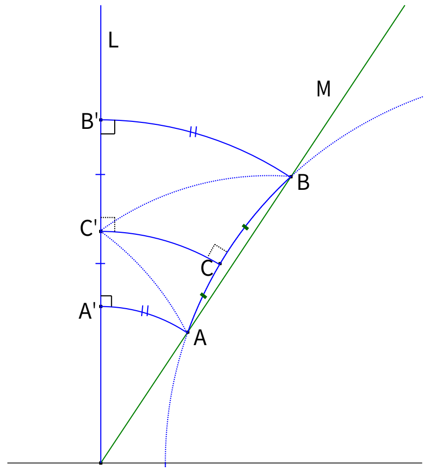
【注】この定理は「**サッケリー・ルジャンドルの定理**」を使うと，さらに幾何的に証明できます．この定理はブルーバックス「**非ユークリッド幾何の世界**」にも載っています．

[定理 2]の系 1．三角形の外角は 内角の和より大きい．

[定理 2]の系 2．四角形の内角の和は 360 度より小さい．

四角形を２つの三角形に分割すれば明らかです．

定理３．M を直線 L の等距離線とする．M 上に２点 A,B をとると，線分 AB は M と L の間を通る．すなわち，線分 AB 上の点と L との距離は M と L との距離より短い．



右図から明らかですが，**定理 2** を使って証明することもできます．A,B から L に下ろした垂線の足を それぞれ A',B'，さらに線分 AB, A'B'の中点を各々 C,C'とします．M は L からの等距離線なので，

$$\overline{AA'} = \overline{BB'}.$$

ゆえに，2 辺挟角相等で，

$$\triangle AA'C' \equiv \triangle BB'C' \cdots ①$$

$$\therefore \overline{AC'} = \overline{BC'}$$

従って三辺相等で，

$$\triangle ACC' \equiv \triangle BCC' \cdots ②$$

$$\therefore \angle ACC' = \angle BCC' = 90^\circ$$

また，①,②より，

$$\angle A'C'C = \angle B'C'C = 90^\circ$$

ところが，四角形 ACC'A'，BCC'A'の内角和は 360° より小さいから，

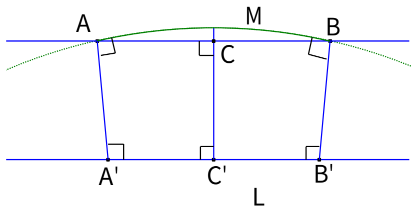
$$\angle A'AC < 90^\circ,\quad \angle B'BC < 90^\circ$$

ゆえに，線分 AB は M と L の間を通ります．

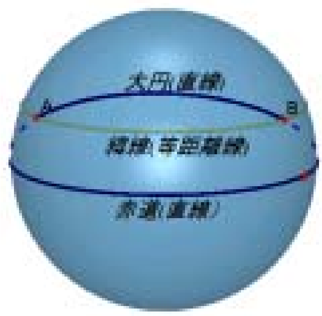
また，線分 CC'は直線 L と直線 AB の共通垂線です．**定理１**から

$$\overline{AB} > \overline{A'B'}$$

です．これも考慮に入れて，等距離線と直線の関係を「無理をして」ユークリッド平面上に描いてみました．右図で青線は直線，緑線は等距離線です．



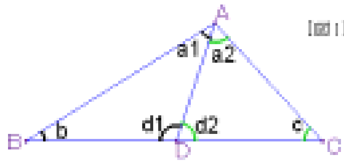
球面では，大円が直線（最短距離線）になります．例えば，地球上で赤道は直線で，緯線は赤道からの等距離線です．H^+ とは逆に，球面上では，線分 AB の方が，等距離線 AB の外側にあります．



補題 2．△ABC に対し，$\delta(\mathrm{ABC})=\pi-(\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C})$ と定義すると，「δ」は加法性がある．

すなわち[図 1]では，

$$\begin{aligned}\delta(ABD)+\delta(ACD) &= (\pi-a_1-d_1-b)+(\pi-a_2-d_2-c)\\ &= (\pi-d_1-d_2)+\{\pi-(a_1+a_2)-b-c\}\\ &= \delta(ABC)\end{aligned}$$



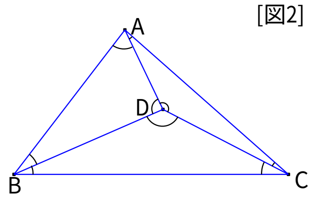
[図 2]のような場合でも，同様にして，

$\delta(ABD)+\delta(BCD)+\delta(CAD)$

$=3\pi-(\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB)-(\angle ADB+\angle BDC+\angle CDA)$

$=\pi-(\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB)$

$=\delta(ABC)$



[図 3]のような場合でも，同様にして，

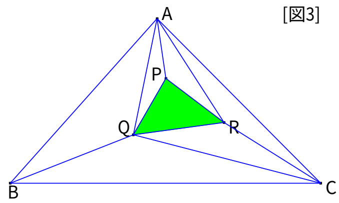
$\delta(APQ)+\delta(ABQ)+\delta(QBC)+\delta(CQR)+\delta(ARC)+\delta(APR)+\delta(PQR)$

$=7\pi-(\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB)-(P,Q,R$ の周りの角の合計$)$

$=7\pi-(\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB)-2\pi\times 3$

$=\pi-(\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB)$

$=\delta(ABC)$



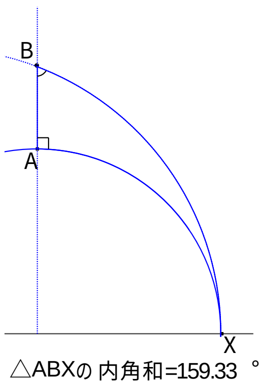
さらに，**定理 2** より，　任意の△ABC に対し，$\delta(\mathrm{ABC})=\pi-(\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C})>0$　だから，

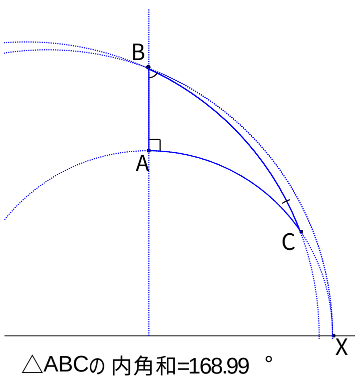
「δ」は面積と同じような性質を持つ

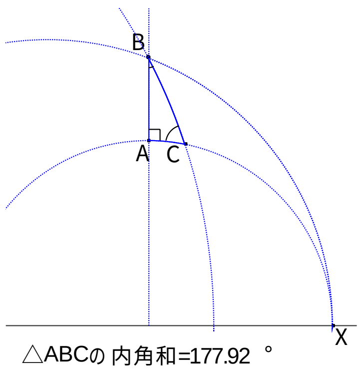
と言えます．

定理４．△PQR が△ABC に含まれるなら，△PQR の内角和は，△ABC の内角和より大きい．

補題 2 から明らかです．すなわち，三角形 ABC の内角の和は　△ABC が小さくなればなるほど増加して 180° に近づきます．例えば∠A が直角の直角三角形 ABC に於いて，∠B が，線分 AB に対する平行線角 $\Pi(s)$ と等しいとき，$\angle C=0^\circ$ となり，内角の和は 「$90^\circ+\angle B$」となります．そして，∠B が小さくなるにつれて，△ABC の内角和は180° に限りなく近づくが，180° を超えることはありません．







CabriⅡによる検証　(定理 4)

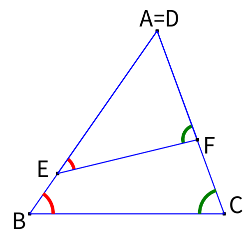
点 C,X,Y を drag して下さい．　　　theorem4.html

定理５．相似な三角形はない．即ち，２つの三角形は，三角が相等しいなら合同になる．

△ABC と△DEF があり，∠A=∠D，∠B=∠E，∠C=∠F とします．この時，頂点 A と D を重ね，半直線 AB 上に点 D が，半直線 AC 上に点 E があるように移動できます．

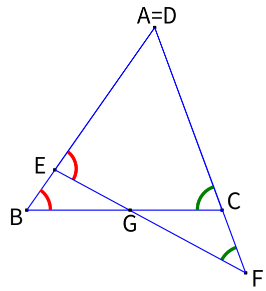
（ア） 辺 BC と辺 EF が，共有点を持たないとき．

四角形 BCFE の内角の和が 360° となり矛盾．



（イ）辺 BC と辺 EF が，共有点 G (但し $G \neq B,C,E,F$) を持つとき．

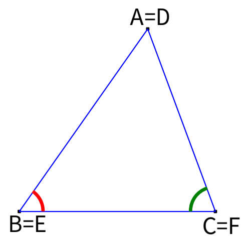
三角形 BEG の外角 AEG が，内角 B と等しくなるので矛盾．



（ウ）辺 BC と辺 EF が，共有点 E をもつとき．

一辺と両端角相等で，△ABC≡△DEF

辺 BC と辺 EF が，共有点 F をもつときも 同様．



以上より，2 つの三角形は，三角が等しいならば合同になる．

すなわち，三角形の合同条件は 次の４つになります．

三角形の合同条件:
- 3 辺相等ならば，三角形は合同.
- 2 辺とその間の角が等しいならば，三角形は合同.
- 1 辺と両端の角が等しいならば，三角形は合同.
- 3 つの角が等しいならば，三角形は合同.

相似三角形が存在しないだけでなく，長さの比例関係も成り立ちません．

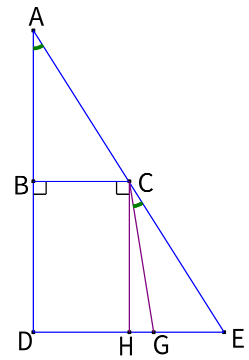
【注】次の定理では，$\overline{AB}$ は 2 点 A,B の双曲的距離[A,B]を表します

定理６．△ABC に於いて，半直線 AB,AC 上に D,E をとる．$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=k$ とすると，

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}>k\ (k>1\text{ のとき}),\qquad \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}<k\ \ (k<1\text{ のとき})$$

(ア) 角 ABC が直角のとき

(a) $k=2$ のとき．



C を通り，直線 BC に垂直な直線と辺 DE との交点を H とします．
線分 BC は直線 BD と CH の共通垂線だから，定理 1 より，

$$\overline{DH}>\overline{BC}\cdots①$$

三角形の内角和は 180 ° より小さいから，

$$\angle A+\angle ACB<90^\circ$$

一方，

$$\angle ECH+\angle ACB=90^\circ$$

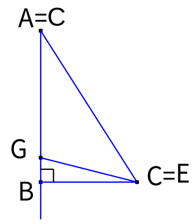
よって

$$\angle ECH>\angle A$$

ゆえに，辺 DH 上に $\angle ECG=\angle A$ となる点 G が取れます．

ここで△ACB と△CEG の辺 AC と辺 CE を重ねると，G は半直線 AB 上にある．
ところが点 C から直線 AB までの距離は，垂線の時が最小となるので，**(9.0** 参照**)**

$$\overline{EG}\geq\overline{BC}\cdots②$$



以上から，

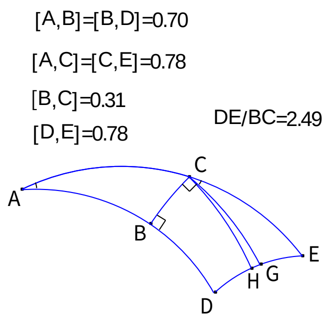
$$\overline{DE}>\overline{DH}+\overline{GE}>\overline{BC}+\overline{BC}=2\cdot\overline{BC}$$

即ち，

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}>2$$

【注１】証明から分かるように，$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=2$ は全く使っていません．D が線分 AB を外分していれば，上の証明は成り立ちます．

【注２】上の説明の図は，見やすくするために，ユークリッド平面での直線を使っています． H^+ に於いては右図のようになります．

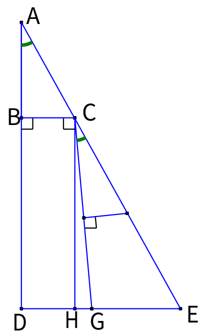


【注３】上の説明で B と D，C と E を入れ替えると，

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{1}{2}\text{ のとき，}\ \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}<\frac{1}{2}$$

も言えます．したがって，$k>1$ のときのみ証明すれば十分です．

(b) $k=3$ のとき．



C を通り，直線 BC に垂直な直線と辺 DE との交点を H とします．このとき，

$$\overline{DH}>\overline{BC}\cdots①$$

また「$k=2$」の時と同様，辺 DH 上に $\angle ECG=\angle A$ となる点 G が取れます．
すると△ABC と△CGE に関して，

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}=2,\quad \angle A=\angle GCE,$$

すると，「$k=2$」の【注 1】で述べたように，$\dfrac{\overline{CG}}{\overline{AB}}$ の値によらず，

$$\frac{\overline{GE}}{\overline{BC}}>2\cdots②$$

以上から，

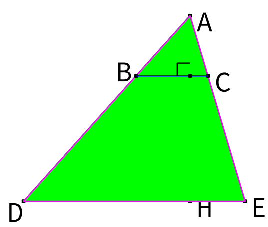
$$\overline{DE}>\overline{DH}+\overline{GE}>\overline{BC}+2\cdot\overline{BC}=3\cdot\overline{BC},\qquad \therefore \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}>3$$

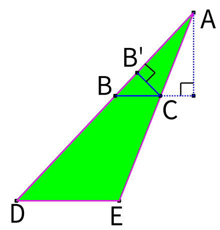
$k=4,5,6\cdots$ のときも同様です．さらに「$k=2$」の【注 3】で述べたように，B と D,C と E を逆にすることによって，$k=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\cdots$ のときも示せます．故に，全ての有理数 k に対し成り立ちます．

k が実数のときも，$\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$ の連続性から成り立ちます．結局，角 ABC が直角のときは成り立ちます．

(イ) 角 ABC が直角でないとき

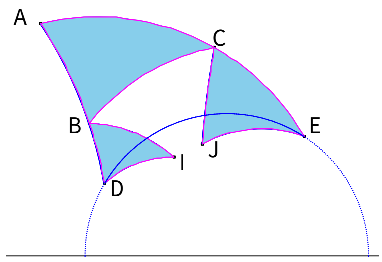
A から辺 BC に垂線を下ろせるときは，明らかです．
垂線を下ろせない時は，角 ACB または角 ABC は鈍角になります。角 ACB が鈍角のときは，C から辺 AB に垂線が下ろして 2 つの 3 角形に分割すれば，やはり，定理が成り立つことが分かります．

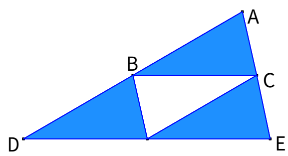




【注】以上の結果は，ユークリッド平面の様に，合同な三角形を 4 つ重ねて，相似比が 2 の三角形を作ることができないことを示しています．

右図で，$\triangle ABC\equiv\triangle BDI\equiv\triangle CJE$ ですが，
$\angle ABC+\angle DBI<180^\circ$，$\angle ACB+\angle ECJ<180^\circ$
ですから，I と J は離れてしまいます．



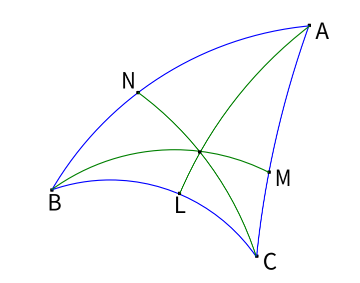


CabriⅡによる検証 (定理 6)

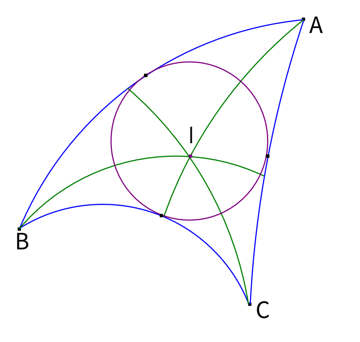
(i) $k=2$ のとき，H^+ に於ける図です．点 A,B,C,P を drag して下さい． theorem6-1.html

(ii) $k=2$ のとき，H^+ に於ける図です．$\triangle ABC\equiv\triangle BDI\equiv\triangle CJE$ です．
点 A,B,C を drag して下さい． theorem6-2.html

以下の定理の証明は
「幾何学Ⅱ」R.ハーツホーン著，難波誠訳，または**「双曲幾何学入門」中岡稔著**
をご覧ください．この中で証明が最も難しいのは **定理７**で，**「幾何学Ⅱ」**にも，完全な形では 載っていません．

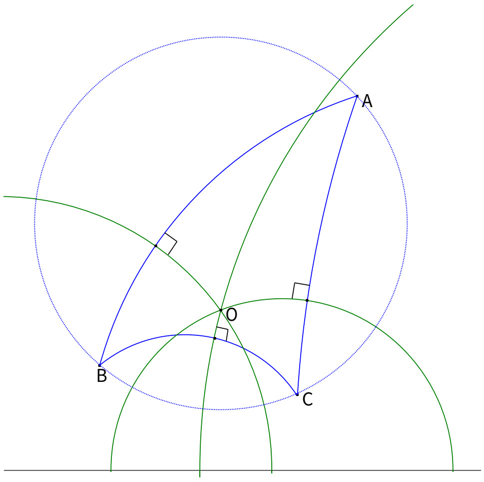
定理 7. △ABC の中線は 1 点で交わる．即ち，重心は存在する．	

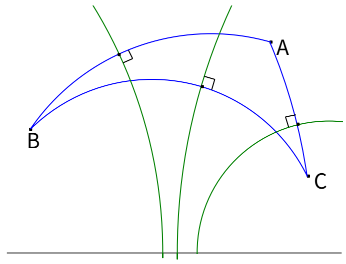
CabriⅡによる検証
Drag A,B,C　　[center of gravity.html]

定理 8. 三角形の内角の 2 等分線は 1 点で交わる． 即ち，内心は存在する．	

CabriⅡによる検証
Drag A,B,C　　[inner center.html]

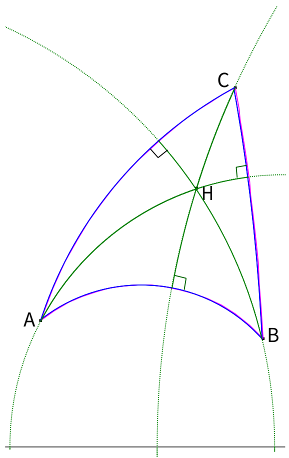
定理 9．三角形の辺の垂直二等分線は交わるとは限らない．しかし，もし 2 本が交わるならば，3 本目も同じ点で交わる．よって，外心は存在する時と存在しない時がある．

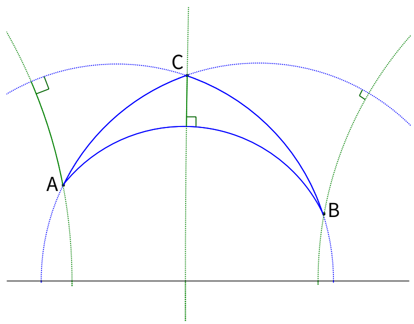




CabriⅡによる検証
Drag A,B,C　　[circum center.html]

定理 10．三角形の頂点から対辺へ下ろした垂線は交わるとは限らない．しかし，もし 2 本が交わるならば，3 本目も同じ点で交わる．即ち，垂心は存在する時もしない時も在る．





CabriⅡによる検証
Drag A,B,C　　[ortho center.html]

以上の CabriⅡファイルは，自作のマクロを使って作成しました．(download 可能)